

Quantenelektrodynamische Selbstenergie und exakte Lösungen der Schrödinger-Gleichung II^{*}

Von H. SALECKER **

(Z. Naturforsch. 5a, 480—492 [1950]; eingegangen am 7. August 1950)

Im ersten Abschnitt wird die Schrödinger-Gleichung in die analytisch einfachste Darstellung als unendliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung gebracht und die Berechtigung dieses Vorgehens für die Quantentheorie der Wellenfelder mit ihren unendlich vielen Freiheitsgraden näher begründet. Dann wird die exakte Lösung des unendlichen Differentialgleichungssystems betrachtet und mit der störungstheoretischen verglichen. Dazu ist es zunächst nötig, im zweiten Abschnitt kurz auf die mathematische Theorie solcher Differentialgleichungssysteme einzugehen. Ihre exakte Lösung läßt sich mit Hilfe einer besonderen mathematischen Operation, der sogenannten Produktintegration, die nur in einfachen Fällen eine Zurückführung auf gewöhnliche Integrationen erlaubt, in geschlossener Form darstellen. Eine entsprechende unendliche Produktdarstellung, wie sie zur Definition des Produktintegrals führt, ist bereits in neueren Arbeiten von Tomonaga und Dyson benutzt worden, ohne daß der Zusammenhang mit dem Produktintegral bekannt zu sein scheint. Dann werden im dritten Abschnitt ganz allgemein die physikalischen und mathematischen Gründe für das merkwürdige Verhalten der störungstheoretischen Lösung der Schrödinger-Gleichung in der Quantentheorie der Wellenfelder erörtert, wobei man zwischen grundsätzlichen und formalen (durch die Benutzung der Störungsrechnung verursachten) Schwierigkeiten zu unterscheiden hat. Dabei erhält man, daß die gute Übereinstimmung der ersten nichtverschwindenden Näherung mit dem Experiment in der Quantenelektrodynamik bei den heute untersuchten Energiebereichen auch zu erwarten ist, dagegen nicht bei den Mesontheorien. Hierbei ergibt sich neben der schon oft betonten Notwendigkeit einer grundsätzlich divergenzfreien Theorie auch die Forderung nach einer die Entwicklungen der Störungsrechnung vermeidenden Lösungsmethode, da ein Teil der besprochenen Schwierigkeiten nur auf diesem Wege zu überwinden ist. Auf den Zusammenhang mit der Tomonaga-Schwingerschen Masse-Ladungsrenormierung wird kurz eingegangen.

Nachdem sich nun in I¹ ergeben hat, daß die Divergenz der Selbstenergie in der Quantenelektrodynamik ohne Auffüllung der negativen Energieniveaus nicht auf die Verwendung der Störungsrechnung zurückzuführen ist, sondern aus den Grundlagen der Theorie stammt, wendet sich das Interesse der Frage zu, warum denn die erste nicht verschwindende Näherung der Störungstheorie besonders für Prozesse der Quantenelektrodynamik so gut mit dem Experiment übereinstimmt. Die Tatsache, daß die Selbstenergie divergiert, bedeutet ja nichts anderes, als daß beim vollständigen Problem mit Wechselwirkung keine Lösungen der zugehörigen Schrödinger-Gleichung zu endlichen Energiewerten existieren. Von diesem Standpunkt sind deshalb die Erfolge der Theorie zunächst ganz unverständlich. Auch die Frage des Verhaltens der höheren Näherungen der Übergangswahrscheinlichkeiten, die

nach der Störungsrechnung bekanntlich ebenfalls divergieren, bleibt zu untersuchen. Zu diesem Zweck ist es zuerst nötig, die exakten Lösungen der Schrödinger-Gleichung zu betrachten, insbesondere diejenige, deren erste Näherung mit der Störungstheorie übereinstimmt. Das geschieht am zweckmäßigsten in der analytisch einfachsten Darstellung der Schrödinger-Gleichung als gewöhnliches, lineares, homogenes, unendliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit den Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden als Unbekannten. Dieses Differentialgleichungssystem wird gewöhnlich aus der Schrödinger-Gleichung in der Koordinatendarstellung auf dieselbe Weise abgeleitet wie bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden, obgleich die dabei benötigten Operationen nicht ohne weiteres auf den Fall unendlich vieler Freiheitsgrade übertragen werden können². Bei Benutzung dieses Systems muß also zunächst auf diesen Einwand eingegangen werden. Anschließend ist es dann für die nachfolgende physi-

* Gekürzte Diss. Tübingen 1949, Teil III.

** Jetzt am Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart.

¹ H. Salecker, Z. Naturforsch. 5a, 431 [1950], im folgenden als I zitiert.

² N. Arley u. V. Borchsenius, Acta Math. 76, 261 [1945].



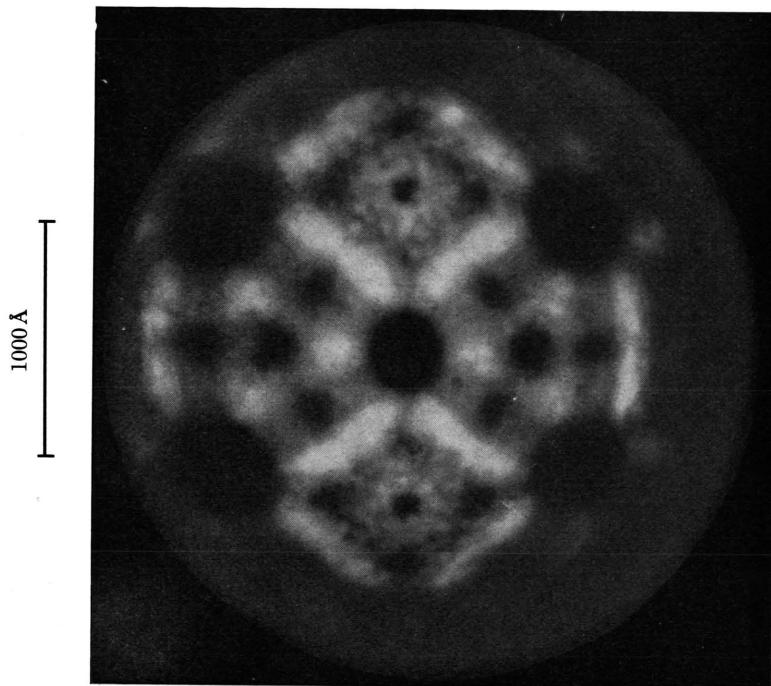


Abb. 2. Einzelne Barium-Atome auf Wolfram.

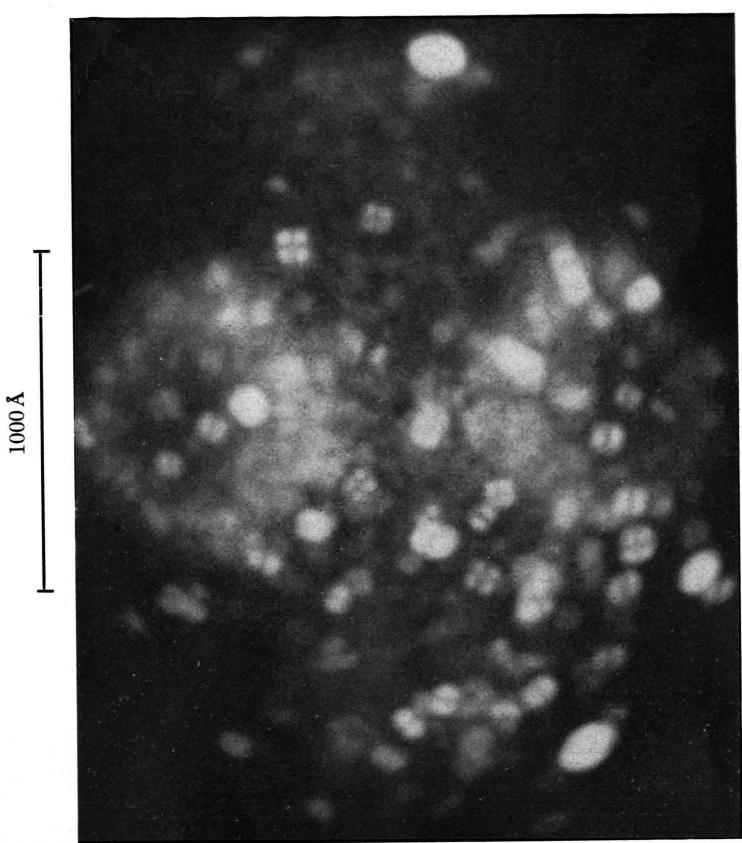


Abb. 6. Phthalocyanin auf Wolfram.

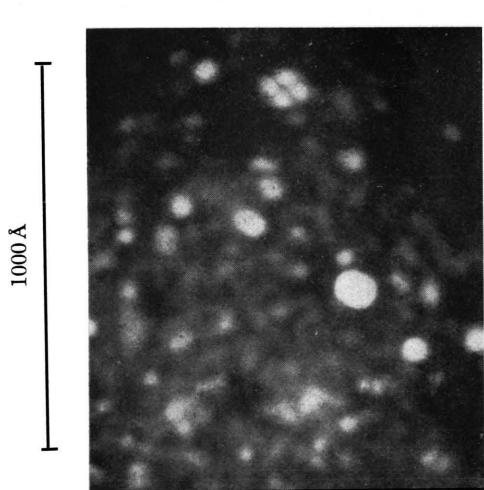


Abb. 7. Porphyrin-Ring des Hämins, am Rande des Gesichtsfeldes etwas verzerrt, mit dunkler Mitte.

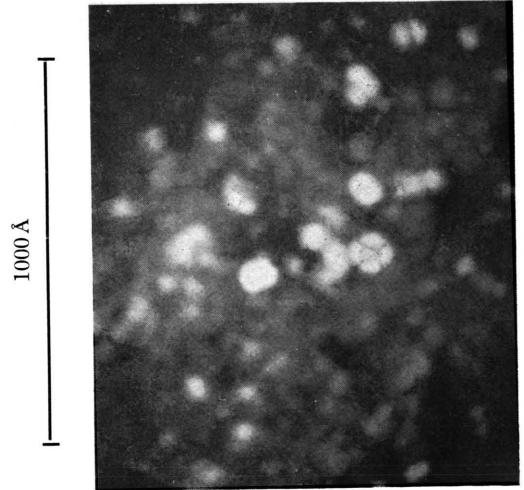


Abb. 8. Porphyrin-Ring des Hämins mit aus der Molekül-ebene herausragendem Cl-Ion in der Mitte.

kalische Diskussion erforderlich, kurz auf die mathematische Theorie solcher Differentialgleichungssysteme einzugehen. An einem Beispiel wird gezeigt, daß die mit den Entwicklungen der Störungstheorie identische exakte Lösung durch Iterationen schon bei unendlichen Systemen mit konstanten Koeffizienten, die auf direktem Wege eindeutig und stetig lösbar sind, nicht zu existieren braucht. Weiterhin lassen sich die in der Quantentheorie der Wellenfelder vorkommenden unendlichen Differentialgleichungssysteme durch eine einfache Transformation auf solche mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Die allgemeine Lösung von Differentialgleichungssystemen der erwähnten Art kann mit Hilfe eines eigens dafür konstruierten mathematischen Gebildes, des sogenannten Produktintegrals von Volterra⁸ und Schlesinger^{9, 10} in geschlossener Form dargestellt werden. Dieses Produktintegral erlaubt nur in besonders einfachen Fällen eine Zurückführung auf gewöhnliche Integrationen, wie z. B. bei Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten. Hierauf wird noch genauer eingegangen. Es ist interessant zu bemerken, daß eine Darstellung der Lösung der verallgemeinerten Schrödinger-Gleichung mit Hilfe eines ganz analogen unendlichen Produkts, wie es gerade das Produktintegral definiert, bereits in der neueren physikalischen Literatur mehrfach vorkommt, ohne daß der Zusammenhang mit dem Produktintegral und seiner Theorie bekannt zu sein scheint (z. B. bei S. Tomonaga und F. J. Dyson¹¹). Dann werden ganz allgemein die physikalischen und mathematischen Gründe für das oben angedeutete merkwürdige Verhalten der störungstheoretischen Lösung der Schrödinger-Gleichung erörtert. Dabei zeigt es sich, daß man zwei Gruppen von Schwierigkeiten zu unterscheiden hat. Die erste kommt aus den Grundlagen der Theorie selbst und verhindert die Existenz einer exakten Lösung überhaupt (grundätzliche Schwierigkeiten). Daneben sind aber weitere Schwierigkeiten zu erwarten, die mit der Verwendung der niedrigsten Näherung der Störungstheorie zusammenhängen, die also auch bei einer richtig formulierten Theorie auftreten würden, wenn man sie mit der Störungsrechnung behandelte (formale Schwierigkeiten). Insbesondere ergibt sich, daß die Größe des Kopplungsparameters ε für das Auftreten der grundsätzlichen Schwierigkeiten ohne Bedeutung ist. Die Größe von ε ist nur maßgebend für die Zahl der Glieder, die bei der störungstheoretischen Entwicklung benutzt werden müssen, um eine gute Näherung zu erhalten. Insgesamt ergibt sich dabei, daß man die

gute Übereinstimmung der ersten nicht verschwindenden Näherung mit dem Experiment in der Quantenelektrodynamik bei den heute experimentell untersuchten Energiebereichen auch erwarten muß, während bei den Mesontheorien eine solche selbst im unteren Bereich relativistischer Mesonenenergien nur größtenteils vorhanden sein kann und im extrem relativistischen Gebiet ganz falsche Werte herauskommen müssen. Weiterhin läßt sich auch die Divergenz der höheren Näherungen der Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden auf dieselben Gründe wie die Selbstenergiedivergenz usw. zurückführen. Dieser letzte Sachverhalt ist inzwischen auch auf rein rechnerischem Wege mit Hilfe der Tomonaga-Schwingerischen Masse-Ladungsrenormierung^{26, 27} in der nächsten nicht trivialen Näherung der Störungstheorie festgestellt worden, wie nachträglich bekannt wurde. Hierauf wird noch kurz eingegangen. Im Gegensatz zu den eben erwähnten Schwierigkeiten sind für das Auftreten der sogenannten „Infrarotkatastrophe“^{21, 22} und z. B. der Schwierigkeiten bei den nach der Störungstheorie berechneten Mesonstreuquerschnitten die oben erwähnten formalen Gründe maßgebend, die ebenfalls besprochen werden. Die Infrarotkatastrophe usw. würden auch in einer richtig formulierten Theorie auftreten, wenn man diese Theorie mit der Störungsrechnung behandelte. Hierbei ergibt sich neben der schon oft betonten Notwendigkeit einer in ihren Grundlagen divergenzfreien Theorie auch die Forderung nach einer die Entwicklungen der Störungsrechnung vermeidenden Lösungsmethode, da ein Teil der besprochenen Schwierigkeiten nur auf diesem Wege zu überwinden ist. Mit dieser Methode muß es insbesondere möglich sein, Probleme mit starker Kopplung zu lösen (oder besser Probleme mit mittlerer Kopplung wie in den Mesontheorien, wo eine Rechnung mit starker Kopplung bekanntlich ebenfalls zu schlechten Ergebnissen geführt hat). Nehmen wir z. B. an, wir hätten die richtige Theorie, in der also keine Divergenzen usw. vorkommen, gefunden und nur die Störungsrechnung stände zu ihrer Lösung zur Verfügung, so könnten wir bei vielen Fragen doch gar nicht feststellen, ob die vorliegende Theorie allen Anforderungen genügen könnte. Insbesondere könnte sogar die heutige Situation dabei entstehen, wenn die Lösung nicht nach dem Kopplungsparameter entwickelbar wäre (wie etwa in dem Beispiel in I, Abschnitt 3). Auf den gegenwärtigen Formalismus der Quantentheorie der Wellenfelder wäre eine solche exakte Lösungsmethode allerdings nicht unmittelbar anwendbar, da, wie noch genauer besprochen wird,

der betreffenden Schrödinger-Gleichung erst durch die korrespondenzmäßig-störungstheoretische Behandlung ein Sinn gegeben wird. In einer nachfolgenden Arbeit wird versucht, eine solche exakte Lösungsmethode im Anschluß an das Produktintegral anzugeben. Diese Methode gestattet es, die Lösung des vorkommenden unendlichen Differentialgleichungssystems auf eine Fredholmsche Integralgleichung bzw. auf endlich viele Integrationen allein zurückzuführen.

1. Entwicklung des unendlichen Differentialgleichungssystems

Ganz allgemein geht man von der Schrödinger-Gleichung eines Problems in der Koordinatendarstellung (q -Darstellung) aus

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (2.1)$$

Diese Form ist jedoch für unsere Zwecke nicht besonders geeignet. Wir wollen vielmehr das unendliche Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit den Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden als Unbekannte benützen, das auch dem Diracschen nicht-stationären Störungsverfahren zugrunde liegt. Dieses wird gewöhnlich in der Weise aus (2.1) hergeleitet, daß man die Hamilton-Funktion H in $H = H_0 + H'$ zerlegt, wo H' alle Wechselwirkungsglieder zusammenfassen soll. Denkt man sich die Wechselwirkung erst zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet, so läßt sich für $t < 0$ die allgemeine Lösung Ψ von (2.1) nach dem vollständigen, normierten Orthogonalsystem der Eigenfunktionen des kräftefreien Problems entwickeln. Für $t > 0$ sind dann die Entwicklungskoeffizienten a_n zeitabhängig, so daß gilt

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \psi_{0n} e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.2)$$

Setzt man (2.2) in (2.1) ein, so erhält man unter Benutzung der Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen in bekannter Weise das gewünschte Differentialgleichungssystem³

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{d a_m(t)}{dt} = \sum_n H_{mn} a_n(t) e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \quad (2.3)$$

mit der Abkürzung

$$\int \psi_{0m}^\dagger H' \psi_{0n} dt_v = H_{mn}. \quad (2.4)$$

Befindet sich das durch (2.2) beschriebene System zur Zeit $t = 0$ in dem durch die Eigenfunktion ψ_{0n_0}

³ s. etwa bei W. Heitler, Quantum Theory of Radiation. Oxford University Press 1936, Kapitel 9, 3.

beschriebenen Zustand, so reduziert sich (2.4) auf das eine Glied ψ_{0n_0} , so daß als Anfangsbedingung für die Lösung von (2.3) gilt

$$a_m(0) = \delta_{mn_0}. \quad (2.5)$$

$|a_m(t)|^2$ stellt bekanntlich die Wahrscheinlichkeit dar, das betrachtete System zur Zeit t in dem Zustand m anzutreffen. Da die Störung zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet gedacht werden soll, kann man, anders ausgedrückt, auch sagen, daß $|a_m(t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß von dem zur Zeit $t = 0$ verwirklichten Zustand n_0 in der Zeit t ein Übergang zum Zustand m stattgefunden hat.

Bei der Ableitung des Differentialgleichungssystems (2.3) werden eine Reihe von nicht näher geprüften mathematischen Voraussetzungen gemacht, deren Erfülltsein nur bei Systemen der Punktquantenmechanik mit endlich vielen Freiheitsgraden feststeht, in der Quantentheorie der Wellenfelder mit ihren unendlich vielen Freiheitsgraden, um die es sich hier gerade handelt, jedoch keineswegs gesichert ist⁴. Doch kann man zur Begründung die Grundlagen der Quantenmechanik zu Hilfe nehmen. Wählt man etwa eine solche Darstellung, in der ein vollständiges System von vertauschbaren Observablen F diagonal ist, von der jede den Wert einer dynamischen Variablen zur Zeit t liefert, die für das ungestörte System eine Konstante der Bewegung darstellt, so ist H_0 eine Diagonalmatrix

$$(F' | H_0 | F'') = E_0' \delta_{F' F''} \quad (2.6)$$

(in der bekannten Diracschen Bezeichnungsweise⁴). Die Schrödinger-Gleichung lautet in dieser F -Darstellung

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta t} (F' |)_s = \sum_{F''} (F' | H_0 + H' | F'') (F'' |)_s \quad (2.7)$$

$$= E_0' (F' |)_s + \sum_{F''} (F' | H' | F'') (F'' |)_s.$$

Geht man mit

$$(F' |)_s = e^{-iE'_0 t/\hbar} (F' |)_H \quad (2.8)$$

zur sogenannten Heisenberg-Darstellung über, so liefert (2.7)

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta t} (F' |)_H \quad (2.9)$$

$$= \sum_{F''} (F' | H' | F'') (F'' |)_H e^{i(E'_0 - E''_0)t/\hbar}.$$

⁴ Vgl. z. B. P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik. S. Hirzel, Leipzig 1930.

Hier kann die Summation mit der Integration vertauscht werden, da (2.14) nach der Abschätzung (A) infolge der Voraussetzungen (B), (C) absolut und gleichmäßig konvergent ist. Außerdem folgt auch

$$\sum_{v=1}^{\infty} F(t) X_{v-1}(t) = F(t) \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} X_{v-1}(t) \right\},$$

da die darin enthaltene Doppelsumme absolut konvergiert, wie sich leicht zeigen lässt^{5a}. Damit folgt

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \int_{t_0}^t F(t') X_{v-1}(t') dt' \\ &= X_0 + \int_{t_0}^t \sum_{v=1}^{\infty} F(t') X_{v-1}(t') dt' \\ &= X_0 + \int_{t_0}^t F(t') \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} X_{v-1}(t') \right\} dt' \\ &= X_0 + \int_{t_0}^t F(t') X(t') dt'. \end{aligned}$$

$X(t)$ ist somit das Integral einer stetigen Funktion und deshalb differenzierbar mit stetiger Ableitung, d. h. es gilt (2.11).

Auch die Eindeutigkeit einer Lösung mit vorgegebener Anfangsbedingung lässt sich bei Gültigkeit der Voraussetzungen (B) und (C) leicht zeigen, wie hier jedoch nicht näher ausgeführt werden soll.

Wendet man (2.13) auf (2.3) an, so erhält man, wenn H_{mn} zeitunabhängig ist

$$\begin{aligned} \{X_1\}_{mn_0} &= \left\{ \int_0^t F(s_1) ds_1 \right\}_{mn_0} \\ &= -\frac{i}{\hbar} H_{mn_0} \frac{e^{i(E_m - E_{n_0})t/\hbar} - 1}{E_{n_0} - E_m} \end{aligned} \quad (2.15)$$

und

$$\begin{aligned} \{X_2\}_{mn_0} &= \left\{ \int_0^t F(s_1) \int_0^{s_1} F(s_2) ds_2 ds_1 \right\}_{mn_0} \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_n \frac{H_{mn} H_{nn_0}}{E_{n_0} - E_n} \\ &\quad \cdot \left[\frac{e^{i(E_m - E_{n_0})t/\hbar} - 1}{E_{n_0} - E_m} - \frac{e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} - 1}{E_n - E_m} \right] \end{aligned}$$

usw. Das sind gerade die aus der nichtstationären Diracschen Störungstheorie bekannten Ausdrücke. Die Lösung (2.13) stimmt demnach formal mit der Störungstheorie überein und ist deshalb eine Potenzreihenentwicklung nach dem Kopplungsparameter also in der Quantenelektrodynamik nach der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten $e^2/\hbar c$. Sie teilt damit auch alle Schwierigkeiten der Störungstheorie, die in I

^{5a} s. hierzu die unter ⁵ zitierte Arbeit, S. 42—43.

betachtet wurden und auf die weiter unten in allgemeinerem Zusammenhang zurückzukommen sein wird.

Zunächst lässt sich noch eine wichtige Vereinfachung des Differentialgleichungssystems (2.3) vornehmen. Die Zeitabhängigkeit der Wechselwirkungsoperatoren H' lässt sich nämlich in der Quantentheorie der Wellenfelder mit Hilfe einer kanonischen Transformation eliminieren⁶, so daß H_{mn} in (2.3) zeitunabhängig wird. Setzt man nun

$$a_m(t) e^{-iE_m t/\hbar} = y_m(t) \quad (2.16)$$

und führt jetzt noch die Bezeichnung

$$c_{mn} = -\frac{i}{\hbar} (H_{mn} + E_m \delta_{mn}) \quad (2.17)$$

ein, so nimmt (2.3) schließlich die Gestalt an

$$\dot{y}_m(t) = \sum_n c_{mn} y_n(t), \quad (2.18)$$

wo nun c_{mn} von t unabhängig ist. Wir haben also ein unendliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten erhalten. Die Anfangsbedingungen (2.5) werden durch die Transformation (2.16) nicht geändert. In Matrixform lautet (2.18)

$$\dot{Y}(t) = CY(t) \quad (2.19)$$

mit

$$Y(0) = Y_0. \quad (2.19a)$$

Die formale Lösung (2.13) liefert hier den Ausdruck

$$Y = \left(1 + C t + C C \frac{t^2}{2!} + C C C \frac{t^3}{3!} + \dots \right) Y_0,$$

oder mit Benutzung des Begriffs der Matrixfunktion

$$Y = e^{Ct} Y_0. \quad (2.20)$$

Auf diese elegante Weise ist ein unendliches System von der Gestalt (2.19) bereits von M. Gramagna⁷ gelöst worden. Definiert man Matrixfunktionen mit Hilfe von Potenzreihen, so ist für (2.20) die Existenz von C^2, C^3, \dots notwendig. Bei Gramagna ist deshalb auch vorausgesetzt, daß $\sum_n |c_{mn}|$ für jedes m konvergiert und den Werte nach unter einer von m unabhängigen festen Grenze liegt.

⁶ s. dazu L. Rosenfeld, Z. Physik **76**, 729 [1932], und allgemein bei G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Franz Deuticke, Wien 1943. § 4.

⁷ M. Gramagna, Torino Atti **45**, 469 [1910].

Zur Darstellung der exakten Lösung eines zunächst endlichen Differentialgleichungssystems erster Ordnung sind von Volterra⁸ und Schlesinger^{9,10} noch zwei besondere Operationen eingeführt worden, nämlich das Produktintegral und seine Umkehrung die Derivation, die zunächst recht abstrakt mathematisch erscheinen. Jedoch kommt eine (2.21) ganz entsprechende Produktdarstellung als formale Lösung der Schrödinger-Gleichung bereits in der neueren Literatur mehrfach vor, ohne daß der Zusammenhang mit dem Produktintegral und die zugehörige Theorie bekannt zu sein scheint¹¹. In der komplexen Ebene sei ein reguläres Kurvenstück \mathcal{C} ohne Doppelpunkte gegeben, und $F(t)$ sei eine längs \mathcal{C} stetige Matrixfunktion. Sind jetzt t_0 und t zwei beliebige Punkte auf \mathcal{C} und $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = t$ ($n - 1$) Punkte auf \mathcal{C} zwischen t_0 und t , so wird das Produktintegral von t_0 bis t längs \mathcal{C} durch den folgenden Grenzwert definiert

$$X(t, t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^{n-1} [1 + F(t_\nu) \Delta_\nu], \quad (2.21)$$

falls der Grenzwert existiert. Dabei ist $\Delta_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$ und das größte $|\Delta_\nu| \rightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$. Man schreibt das Produktintegral folgendermaßen

$$X(t, t_0) = \int_{t_0}^t [1 + F(u) du]. \quad (2.21a)$$

Die Derivation ist als Umkehrung des Produktintegrals definiert

$$D_t X(t, t_0) = F(t). \quad (2.22)$$

Für alle Beweise und weiteren Eigenschaften wird auf die Arbeiten von Schlesinger¹⁰ und eine zusammenfassende Arbeit von Rasch¹² verwiesen. Die Bedeutung des Produktintegrals ergibt sich daraus, daß die durch (2.21) definierte Funktion entsprechend ihrer Konstruktion die Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{X}(t, t_0) = F(t) X(t, t_0) \quad (2.23)$$

erfüllt; und zwar stellt $X(t, t_0)$ eine Fundamentallösung von (2.23) dar, d. h. jede andere Lösung ist ein Produkt von $X(t, t_0)$ mit einer konstanten Matrix $X(t_0)$

$$X(t) = X(t, t_0) X(t_0). \quad (2.24)$$

⁸ V. Volterra, Mem. Soc. Ital. Sc. (3) **6**, Nr. 8 [1887]; Mem. Soc. Ital. Sc. (3) **12**, 3 [1902]; Rend. Circ. Mat. Palermo **2**, 69 [1888].

⁹ L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1908. L. Schlesinger, Einführung in die Theorie der gew. Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. 3. Aufl. W. de Gruyter, Berlin 1922.

Wie in der Arbeit von Rasch näher ausgeführt wird, ist der Zusammenhang mit der Peano-Baker-Entwicklung (2.14) dadurch gegeben, daß gilt

$$X(t, t_0) X(t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_\nu(t), \quad (2.25)$$

wobei die X_ν durch (2.13) gegeben sind. Es gilt also nach (2.25) und (2.13)

$$X(t, t_0) = \left[1 + \int_{t_0}^t F(s_1) ds_1 + \int_{t_0}^t F(s_1) \int_{t_0}^{s_1} F(s_2) ds_2 ds_1 + \int_{t_0}^t F(s_1) \int_{t_0}^{s_1} F(s_2) \int_{t_0}^{s_2} F(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 + \dots \right]. \quad (2.26)$$

Hieraus folgt sogleich eine weitere wichtige Eigenschaft des Produktintegrals, wenn Δt ein sehr kleines t -Intervall darstellt

$$\int_t^{t+\Delta t} [1 + F(u) du] = 1 + F(t) \Delta t + o(\Delta t), \quad (2.27)$$

die bei der Anwendung auf die quantenmechanische Störungsrechnung eine Rolle spielen wird ($o[f(x)]$ bedeutet das bekannte Landausche Symbol).

Für die Anwendungen ist noch die Frage wichtig, wann man die Produktintegration auf gewöhnliche Integrationen zurückführen kann. Das ist z. B. immer dann der Fall, wenn die Matrix $F(t)$ mit ihrem Integral von t_0 bis t vertauschbar ist. Dann gilt

$$\int_{t_0}^t [1 + F(u) du] = e^{\int_{t_0}^t F(u) du}. \quad (2.28)$$

Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt für ein System mit konstanten Koeffizienten also etwa für (2.19). Hier erhält man mit Hilfe von (2.28) unmittelbar den Ausdruck (2.20) als Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems. Für weitere Fälle der Produktintegration durch Quadratur muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

Durch die Unabhängigkeit des Produktintegrals (2.21) von der Zahl der Gleichungen des Differentialgleichungssystems wird die Verallgemeinerung auf unendlich viele Gleichungen nahegelegt. Ihre Gültigkeit läßt sich mit Hilfe von (2.25) sofort für den Existenzbereich von (2.13, 14) sichern.

Es erhebt sich nun die Frage, ob im Falle unendlich vieler Gleichungen nur dann Lösungen existieren

¹⁰ L. Schlesinger, Math. Z. **33**, 33 [1931].

¹¹ z. B. bei S. Tomonaga, Prog. Theor. Physic [Japan] **1**, 27 [1946], Gleichung (31). F. J. Dyson, Physic. Rev. (2) **75**, 486 [1949].

¹² G. Rasch, J. rein. u. angew. Math. **171**, 65 [1934].

(oder mindestens nur dann eindeutige), wenn die Entwicklung (2.13, 14) existiert oder, anders ausgedrückt, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit von (2.11) bzw. (2.10) mit (2.10a) sind. Die Frage der notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist jedoch in der Literatur nirgends untersucht. Gelegentlich wird noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß die angegebenen Bedingungen für die Lösbarkeit von (2.10) mit (2.10a) nur hinreichenden Charakter haben. Eine Ausnahme bildet eine Arbeit von Wilson¹³. Dort findet sich auf Seite 592 unten der folgende Satz (in unserer Bezeichnungsweise): „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung von (2.11), wobei $X^\dagger(t) X(t) = \sum_m |x_m|^2$ im Gebiet \mathfrak{G} endlich ist, bildet die Beschränktheit im Hilbertschen Sinne der Matrix (2.26).“ Dabei bedeutet \mathfrak{G} ein endliches Gebiet um t_0 , das frei von Singularitäten der Koeffizienten ist. Da (2.26) gerade die Iterationsentwicklung (2.13, 14) mit $X(t_0) = 1$ bedeutet, die im Falle der Existenz mit dem Produktintegral übereinstimmt, behauptet dieser Satz, daß die Existenz der Iterationslösung nicht nur eine hinreichende, wie schon vorher bekannt, sondern auch eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung des unendlichen Differentialgleichungssystems überhaupt darstellt. Geht man jedoch den Beweis durch, so erkennt man, daß die angegebenen Bedingungen nur notwendig und hinreichend sind für die Existenz der Iterationslösung (2.13, 14), daß damit jedoch keineswegs gesagt ist, daß sonst überhaupt keine Lösungen vorhanden sind. In der Tat kann man leicht ein Gegenbeispiel angeben, das teilweise aus einer zu anderen Zwecken angelegten Beispieldammlung von Arley und Borchsenius² stammt und das hier wegen seiner Wichtigkeit für die nachfolgende physikalische Diskussion angeführt werden soll. Es sei das System gegeben

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= \frac{\lambda}{1 \cdot 2} x_1 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} n x_n \\ \dot{x}_1(t) &= -\lambda x_0 \\ \dots & \\ \dot{x}_m(t) &= -m \lambda x_m + \frac{\lambda}{m(m+1)} x_1, \quad m=2, 3, \dots \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

¹³ A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **122**, 589 [1929]; Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **124**, 176 [1929].

¹⁴ Vgl. die unter ⁵ zitierte Arbeit. S. 53—54.

Bildet man hier $X_2(t)$, das in (2.26) vorkommt, so erhält man

$$X_2(t) = \int_{t_0}^t \overline{F(s_1)} \int_{t_0}^{s_1} F(s_2) ds_2 ds_1 = F^2 \frac{(t-t_0)^2}{2},$$

da F von t unabhängig ist. Nun bekommt man etwa für das Element $\{F^2\}_{01}$

$$\{F^2\}_{01} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{0n} f_{n1} = \lambda^2 \left[-\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \right].$$

Diese Reihe divergiert aber bekanntlich, so daß bereits F^2 in diesem Beispiel nicht existiert, d. h. auch die Matrix (2.26) existiert nicht. Das Differentialgleichungssystem (2.29) sollte also nach Wilson keine Lösung mit konvergenter Summe der Absolutquadrate haben. Man kann jedoch das System (2.29) direkt lösen, indem man mit der zweiten Gleichung anfängt und zum Schluß die erste behandelt. Wählt man als Anfangsbedingung etwa

$$X(t_0) = \{x_{mn'}(t_0)\} = \{\delta_{mn'}\}, \quad n' = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

so erhält man mit Arley und Borchsenius

$$\begin{aligned} x_{1n'}(t) &= \delta_{1n'} e^{-\lambda(t-t_0)} \\ x_{mn'}(t) &= \delta_{mn'} e^{-m\lambda(t-t_0)} + \frac{\delta_{1n'}}{m(m+1)(m-1)} \\ &\quad \cdot [e^{-\lambda(t-t_0)} - e^{-m\lambda(t-t_0)}] \quad \text{für } m > 1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

und

$$\begin{aligned} x_{0n'}(t) &= \delta_{0n'} + \Delta(n' \geq 2) [1 - e^{-n'\lambda(t-t_0)}] \\ &\quad + \delta_{1n'} \left\{ \frac{1}{2} [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}]^2 e^{\lambda(t-t_0)} \ln [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] \right\}. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\Delta(n' \geq 2) = \begin{cases} 1 & \text{für } n' \geq 2 \\ 0 & \text{für } n' < 2. \end{cases}$$

Die angegebenen Lösungen sind unter der Bedingung $\Re[\lambda(t-t_0)] \geq 0$ abgeleitet. Auch die Konvergenz der Summe der Absolutquadrate, die bei Arley und Borchsenius nicht untersucht wurde, kann leicht nachgewiesen werden¹⁴, wie hier nicht im einzelnen ausgeführt werden soll. Damit ist der Satz von Wilson durch das angegebene Beispiel widerlegt. Die Konvergenz von (2.26) ist also nur eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (2.10) bzw. (2.11). Darüber hinaus gibt es unendliche Differentialgleichungssysteme mit sogar eindeutigen und stetigen

Lösungen, wo die einzelnen Glieder von (2.26) nicht existieren. Wie das angegebene Beispiel zeigt, kann dieser Fall schon bei unendlichen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten vorkommen, wo also die Koeffizienten keine Singularität enthalten. Das wird vielleicht verständlicher, wenn man bedenkt, daß nach (2.15) die Entwicklung (2.13, 14) formal mit der Störungstheorie übereinstimmt. Sie ist also, wie dort betont wurde, eine Potenzreihenentwicklung nach dem Kopplungsparameter oder in der Form mit konstanten Koeffizienten der Differentialgleichungen eine Potenzreihenentwicklung nach den unabhängigen Variablen, die natürlich nur dann existiert, wenn die Lösung mit Rücksicht nach dem Parameter bzw. der unabhängigen Variablen in einem den Entwicklungspunkt enthaltenden Gebiet analytisch ist. Wie in unserem Beispiel aus (2.31) ersichtlich wird, enthält $x_{0n'}(t)$ eine Funktion $v^2 \ln v$, wenn $v = 1 - e^{-\lambda(t-t_0)}$ gesetzt wird. Für $t = t_0$ ist $v = 0$, und im Punkte $v = 0$ hat $v^2 \ln v$ im Komplexen einen unendlichen Verzweigungspunkt, so daß die Potenzreihenentwicklung um diesen Punkt und damit auch die Störungstheorie versagen muß, wie das in I auch mit Hilfe eines anderen Beispiels erläutert wurde.

3. Anwendung auf die erste Näherung und auf die höheren Näherungen

Mit Hilfe der exakten Lösung (2.13, 14) können nun einige die Störungstheorie betreffende Fragen geklärt werden. Zunächst läßt sich noch etwas über die Konvergenz der aus dem Störungsverfahren folgenden Reihenentwicklungen aussagen. Man hält gewöhnlich die Kleinheit des Störungsgliedes H' in der Hamilton-Funktion bzw. des Kopplungsparameters ε (in der Quantenelektrodynamik ist $\varepsilon = e^2/\hbar c \approx 1/137$) dafür maßgebend. Wie jedoch aus dem Existenzbeweis im Abschnitt 2 in Verbindung mit dem eben richtiggestellten Satz von Wilson hervorgeht (insbesondere auch für die in der Quantentheorie der Wellenfelder vorkommenden Systeme mit konstanten Koeffizienten), ist die Konvergenz von (2.13, 14) gleich der einer Exponentialreihe, sofern (2.14) überhaupt existiert, d. h. die Entwicklung konvergiert dann für alle Werte von ε . Die Größe von ε ist nur maßgebend für die Zahl der Glieder von (2.13), die berücksichtigt werden muß, um eine gute Näherung zu erhalten. Andererseits ist es jetzt nach den obigen Erörterungen über den nur hinreichenden Charakter der Existenz der Iterationslösung für das Vorhanden-

sein einer Lösung überhaupt und dem eben diskutierten Beispiel verständlich, daß selbst bei noch so kleinem H' bzw. ε Divergenz der Entwicklungen eintreten kann.

Nun ist jedoch besonders die Quantenelektrodynamik durch die zunächst merkwürdige Situation gekennzeichnet, daß die niedrigste nicht verschwindende Näherung der Störungstheorie Ergebnisse liefert, die mit dem Experiment in den bekannten Energiebereichen innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen, dagegen die höheren Näherungen divergieren, während in der Mesontheorie die Übereinstimmung der ersten nicht verschwindenden Näherung mit dem Experiment weniger gut ist und insbesondere bei hohen Energien ganz falsche Werte herauskommen. Betrachten wir zunächst wieder mit Arley und Borchsenius das Beispiel (2.29), das die Lösung (2.31) besitzt. Bilden wir aus den einzelnen zu $n' = 0, 1, 2, \dots$ gehörigen Spaltenmatrizen eine quadratische Matrix, so stellt diese ein Fundamentalsystem dar, da, wie man leicht sieht, jede andere Lösung durch Multiplikation mit einer passenden konstanten Matrix daraus erhalten werden kann. Obgleich die Entwicklung (2.26) hier nicht existiert, haben wir doch einen Ausdruck für die Fundamentalslösung erhalten

$$X(t, t_0) = \{x_{mn'}(t, t_0)\}. \quad (2.32)$$

Mit Hilfe der expliziten Formeln (2.31) überzeugt man sich nun leicht, daß auch hier für die Lösung (2.32) bei kleinen Zeitintervallen entsprechend (2.27) gilt

$$X(t) = [1 + F(t_0)(t - t_0)] X(t_0), \\ \text{für } |t - t_0| \ll 1, \quad (2.27a)$$

denn da die Funktionen $x_{mn'}$ in $t_0 \leqq t \leqq t_1$ Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, sind sie auch in t_0 wenigstens von rechts differenzierbar. Man erhält also mit Hilfe des die erste Näherung der Störungstheorie darstellenden Ausdrucks (2.27a) für genügend kleine Zeitintervalle eine gute Näherung für die exakte Lösung, obgleich die weiteren Entwicklungsglieder der Störungstheorie divergieren. Entsprechende Verhältnisse herrschen in der Umgebung von singulären Punkten der exakten Lösung auch bei anderen unendlichen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung von der oben behandelten Form, wenn diese Punkte sich am Rande des betrachteten Gebietes befinden, da die Lösungen eben Funktionen darstellen müssen, die die Differentialgleichungen in dem betrachteten Gebiet befriedi-

gen, also in Randpunkten wenigstens eine einseitige erste Ableitung besitzen. Nach den Ausführungen in I kann dieser Sachverhalt jedoch nicht zur Klärung der Verhältnisse in der Quantentheorie der Wellenfelder herangezogen werden. Er findet wohl Anwendung auf einige Besonderheiten in der Punktquantenmechanik (z. B. beim Stark-Effekt). In der Quantenelektrodynamik dagegen existiert nach I gar keine exakte stationäre Lösung. Bei Arley und Borchsenius² ist auf S. 303 ein einfaches Beispiel dafür angegeben, daß ein unendliches Differentialgleichungssystem der Form (2. 10) außer einer trivialen konstanten Lösung keine weitere besitzt. Damit ist nun ersichtlich, daß die Gründe für die gute Übereinstimmung der ersten nicht verschwindenden Näherung der Störungstheorie mit dem Experiment aus physikalischen Betrachtungen zu entnehmen sind, denn wenn gar keine exakte Lösung existiert, ist es mathematisch auch vollkommen unklar, womit eine etwa vorhandene erste Näherung verglichen werden soll.

Bevor wir in die genauere Diskussion dieses merkwürdigen Sachverhalts eintreten, wollen wir uns für das Nachfolgende noch kurz vergegenwärtigen, welche physikalischen Vorgänge den höheren Entwicklungsgliedern der störungstheoretischen Behandlung entsprechen und welche physikalische Bedeutung der Konvergenz oder Divergenz von (2. 13, 14) zugrunde liegt. Die Matrix der Wechselwirkungsenergie hat bekanntlich in der Quantentheorie der Wellenfelder im allgemeinen nur Elemente für Übergänge, bei denen nur ein Teilchen (im nichtrelativistischen Fall höchstens zwei) entsteht oder verschwindet. Die erste Näherung entspricht also der Mitwirkung (Emission, Absorption) von einem Teilchen (Lichtquant oder Meson), die zweite Näherung der Mitwirkung von zwei Teilchen usw. Wenn also die Konvergenz der Entwicklungen gut ist, wird das bedeuten, daß die Mitwirkung vieler Teilchen jedenfalls sehr viel seltener stattfindet als diejenige eines einzelnen Teilchens. Umgekehrt bedeutet schlechte Konvergenz der Entwicklungen, daß die Mitwirkung vieler Teilchen bei irgendeinem Prozeß nicht wesentlich seltener vorkommen wird als die Mitwirkung weniger, und Divergenz der Entwicklungen wird aussagen, daß die Mitwirkung sehr vieler Teilchen überwiegend auftritt. Die unmittelbare Übertragung dieser Betrachtungen auf die tatsächlich erhaltenen Entwicklungen wird jedoch durch die schon erwähnte Tatsache sehr erschwert, daß die höheren Entwicklungsglieder selbst Divergenzen enthalten. Hierauf muß deshalb zunächst eingegangen werden.

Wie die Betrachtung der klassischen Elektrodynamik lehrt, ist die Feldtheorie richtig formuliert bis auf die Eigenkräfte (Eigenfelder) punktförmiger Teilchen (siehe I). Setzt man nun die experimentelle Masse im mechanischen Trägheitsglied ein, so sind die elektromagnetischen Trägheitskräfte dort mit berücksichtigt, und die noch zu den Eigenkräften gehörigen Reaktionsterme sind bekanntlich in Wirklichkeit im allgemeinen klein gegenüber den äußeren Kräften, was darauf zurückzuführen ist, daß die Wechselwirkung des Elektrons mit seinem Strahlungsfeld gewöhnlich schwach ist (Näheres dazu weiter unten). Man erhält dann beim Weglassen der gesamten Eigenkräfte eine recht gute Annäherung an die Wirklichkeit. Geht man zur Quantentheorie über, so hat man außer den Eigenkräften klassischen Ursprungs noch diejenigen Rückwirkungen fortzulassen, die durch die Schwankungen des quantisierten Vakuumfeldes entstehen (anders ausgedrückt, d. h. in der Sprache der Störungstheorie, kommen die letzteren ebenfalls durch die ständigen Emissions-Reabsorptionsprozesse von Lichtquanten zustande, in die die Wechselwirkung eines Elektrons mit seinem Feld in der Quantenelektrodynamik aufgelöst wird). Nun werden in der ersten nicht verschwindenden Näherung der Störungstheorie alle Selbstrückwirkungen immer fortgelassen, da dann nur Glieder auftreten, die keine Emissions- und Reabsorptionsvorgänge gleicher Lichtquanten unbegrenzt hoher Energie bei demselben Elektron beschreiben (endliche Anzahl von Zwischenzuständen). Damit ist die erste Näherung der vorhandenen Theorie, die durch Störungsrechnung gewonnen wurde, gleich der ersten Näherung einer Theorie, die die Selbstrückwirkungen in der eben angedeuteten Weise grundsätzlich vernachlässigt. In dieser Theorie würde jedoch die Reihe (2. 13, 14) für die exakte Lösung existieren, da dann gerade die Terme fehlen, die zu den beobachteten Divergenzen Anlaß geben. In der Tat sind bekanntlich alle divergierenden Glieder von solcher Gestalt, daß sie Emissions-Reabsorptionsvorgänge desselben Elektrons mit einschließen. Ist nun ganz allgemein das Wechselwirkungsglied H' mit dem Kopplungsparameter ε klein gegenüber den Termen der Hamilton-Funktion, die die freien Felder darstellen, so wird jetzt das erste nicht verschwindende Glied von (2. 13, 14) eine genügend genaue Näherung für die durch die ganze Reihe dargestellte exakte Lösung, die hier existiert, liefern [wie im Abschnitt 2 näher erläutert wurde, ist (2. 13, 14) eine Potenzreihenentwicklung nach dem Kopplungsparameter ε]. Da diese

Lösung, wie oben erwähnt, mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmt und da die übliche nicht verschwindende erste Näherung mit der eben besprochenen ersten Näherung der die Selbstrückwirkungen grundsätzlich vernachlässigenden Theorie identisch ist, ist die gute Übereinstimmung der störungstheoretisch gewonnenen Ergebnisse mit dem Experiment auch zu erwarten, sofern eben die oben genannte Bedingung der Kleinheit der Wechselwirkung befriedigt ist. Daß die letztere Bedingung in der Quantenelektrodynamik mindestens bis zu sehr hohen, heute noch kaum zugänglichen Energien erfüllt ist, sieht man außer an der Kleinheit des Kopplungsparameters und dem Bau der Wechselwirkungsglieder (sie enthalten keine Terme, die mit der Energie anwachsen wie etwa in der Mesontheorie) noch genauer aus den folgenden Überlegungen. Heisenberg hat bei der Untersuchung der Gültigkeitsgrenzen der bisherigen Quantentheorie für ihre Anwendbarkeit die Bedingung aufgestellt¹⁵

$$\left| \Delta p^2 - \frac{\Delta E^2}{c^2} \right| \ll \mu^2 c^2 = \left(\frac{\hbar}{l_0} \right)^2, \quad (2.33)$$

wobei Δp die Impuls- und ΔE die Energieübertragung (in einem beliebigen Koordinatensystem) bei dem betrachteten Prozeß sowie μ die ungefähre Mesonenmasse und l_0 die dazugehörige Compton-Wellenlänge darstellen. Diese Bedingung ergibt sich gerade, wenn man fordert, daß das Wechselwirkungsglied H' mit dem Kopplungsparameter ϵ klein gegenüber den Termen der Hamilton-Funktion ist, die die freien Felder darstellen, d. h. der Quotient aus Wechselwirkungsenergie und Eigenenergie der Felder soll klein sein gegen eins¹⁶. Wie schon erwähnt wurde, ist das nämlich eine notwendige Bedingung dafür, daß die erste nicht verschwindende Näherung der Störungstheorie genügend genaue Ergebnisse liefert. Aus (2.33) folgt sogleich, daß die Emission von Lichtquanten und die Entstehung von Elektronen und Positronen nach der bisherigen Theorie behandelt werden können¹⁷. Auch andere Prozesse der Quantenelektrodynamik sind nach (2.33) bis zu sehr hohen Energien behandelbar. Betrachtet man etwa die Streuung eines Elektrons und eines Positrons einander im Schwerpunktsystem, so lautet hier (2.33)

$$\Delta p' \ll \mu c = \frac{\hbar}{l_0}. \quad (2.33a)$$

¹⁵ W. Heisenberg, Z. Physik **110**, 251 [1938].

¹⁶ s. dazu Fußnote ¹⁵, S. 258/259, sowie speziell für eine vereinfachte Mesontheorie bei W. Heisenberg, Z. Physik **113**, 61 [1939].

¹⁷ Fußnote ¹⁵, S. 258.

Bei dem seltenen Fall der vollkommenen Rückstreuung, der die größte Impulsänderung liefert, ergibt sich erst bei einer Energie jedes Teilchens im Schwerpunktsystem von $E' \approx 10^8$ eV eine Impulsänderung von der Größenordnung μc . Diesem Fall entspricht in dem Bezugssystem, in dem das Elektron ruht (Laboratoriumssystem), durch Lorentz-Transformation eine Energie des einfallenden Positrons der Größenordnung $E \approx 4 \cdot 10^{10}$ eV. Anders liegen dagegen die Verhältnisse in der Mesontheorie, wie man schon aus der Größe der Kopplungsparameter ($1/10$ bis nahe 1) und der Tatsache sieht, daß Teile der Wechselwirkungsglieder H' in der Hamilton-Funktion mit der Energie anwachsen. Daraus hat Heisenberg¹⁸ geschlossen, daß bei einem energiereichen Stoß eines Nukleons auf ein anderes viele Mesonen in einem einzigen Elementarakt entstehen können, sobald es der Energiesatz erlaubt, und daß solche Vielfachprozesse auch mit relativ großer Wahrscheinlichkeit vorkommen. Betrachtet man etwa den Stoß eines positiven und eines negativen Mesons, die im Schwerpunktsystem je eine Energie $E' = 1,1 \cdot 10^8$ eV besitzen, so folgt jetzt im Laboratoriumssystem in derselben Weise wie oben eine Energie $E \approx 1,4 \cdot 10^8$ eV für das einfallende Meson, wobei hier die Impulsänderung bei Rückstreuung im Schwerpunktsystem ebenfalls $\approx \mu c$ ist. In dem Bereich relativistischer Mesonenenergien sind also die Wechselwirkungssterme in der Hamilton-Funktion nicht mehr klein. Damit hängt auch zusammen, daß jetzt die Wirkung der Reaktionsterme im Gegensatz zu dem Verhalten in der Quantenelektrodynamik oft keineswegs schwach ist. Hier müßten bei Existenz der Reihe (2.13, 14) mehr Glieder (bei höheren Energien immer weitere) als nur das erste herangezogen werden, um eine brauchbare Näherung zu ergeben.

Berechnet man nun in der vorhandenen Theorie eine höhere Näherung, so sind bei dem hier benutzten Formalismus unter anderem fortgesetzt unendliche Matrizen miteinander zu multiplizieren, wie man aus der der Störungstheorie entsprechenden exakten Lösung (2.13, 14) oder besser noch aus der Form (2.15) und (2.26) sieht. Dabei ergeben sich auch Terme, die den bei der Selbstenergieberechnung auftretenden vollkommen analog sind. Es sind also diejenigen Bestandteile, die, physikalisch gesprochen, die unendlich großen Selbstrückwirkungen darstellen, dort mit den übrigen verknüpft, so daß die Über-

¹⁸ W. Heisenberg, Z. Physik **113**, 61 [1939]; Vorträge über kosmische Strahlung. Springer-Verlag, Berlin 1943, Seite 115.

gangswahrscheinlichkeitsamplituden divergieren. Das ist verständlich, weil eine unendlich große Rückwirkung einen Übergang in unendlich kleiner Zeit erzeugt und die Wahrscheinlichkeitsamplituden auf endliche Zeiten (auf die Zeiteinheit) bezogen sind. Die Divergenz der höheren Näherungen der Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden stammt also aus derselben Wurzel wie die Selbstenergiedivergenz, nämlich aus der unzutreffenden Formulierung der Eigenkräfte (des Eigenfeldes) punktförmiger Teilchen sowie den Wirkungen der Feldschwankungen in der quantisierten Theorie.

Jedoch nicht alle im Zusammenhang mit den Übergangswahrscheinlichkeiten auftretende Divergenzen entstehen auf diese Weise. Wie eben erörtert wurde, stellt besonders in den Mesontheorien die niedrigste nicht verschwindende Näherung schon in den heute untersuchten Energiebereichen nur eine ungenügende Näherung dar. Auch in der Quantenelektrodynamik ist zu erwarten, daß beim Fortschreiten zu noch weit höheren Energiebereichen, wie sie heute noch nicht untersucht sind, an manchen Stellen entsprechende Schwierigkeiten auftreten werden¹⁹, die eben rein damit zusammenhängen, daß man eine unendliche Reihe durch ihr erstes Glied ersetzt und die deshalb auch in einer Theorie vorkommen würden, wo die Selbstrückwirkungen richtig formuliert sind, wenn man sie mit der Störungstheorie behandelte. Insbesondere wird dabei die Strahlungsdämpfung immer vernachlässigt. Diesem speziellen Übelstand abzuhelpfen, gestattet die von Heitler und Mitarbb.²⁰ entwickelte Theorie der Strahlungsdämpfung, wo etwa die Streuamplituden durch eine Integralgleichung bestimmt werden. Tatsächlich wird dabei eine Verbesserung z. B. der Streuquerschnitte der Mesontheorien für hohe Energien erhalten. Um aber die oben besprochenen, in den Grundlagen der Theorie verankerten Divergenzen loszuwerden, beschränkt man sich auch hier auf die niedrigstmögliche nichtverschwindende Näherung, die nur um die Strahlungs-

¹⁹ Inzwischen hat B. Kockel, Ann. Physik (6) **4**, 279 [1949], durch direkte Berechnung der Zerstrahlungswahrscheinlichkeit eines Elektron-Positron-Paars in zwei bzw. drei Lichtquanten gezeigt, daß oberhalb einer bestimmten Grenzenergie die beiden Wahrscheinlichkeiten von der gleichen Größenordnung werden. Daraus muß man schließen, daß dann das bisherige Vorgehen, die Prozesse nach der Zahl der beteiligten Lichtquanten einzuteilen und damit die entsprechende Verwendung der Störungstheorie unpassend wird.

²⁰ W. Heitler, Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 291 [1941]. A. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 301 [1941]. W. Heitler u. H. W. Peng, Proc. Camb. Phil. Soc. **38**, 296 [1942].

dämpfung korrigiert ist. Vergleicht man das mit der exakten Lösung (2. 13, 14) und der obigen Diskussion, so ist daraus ersichtlich, daß auf diese Weise keineswegs eine Gesamtlösung der eben beschriebenen, nicht in den Grundlagen der Theorie, sondern nur mit der Verwendung der Störungsrechnung zusammenhängenden Schwierigkeiten erreicht wird. Behandelt man weiterhin nach der Störungstheorie die Strahlungskorrektion der Streuung von Elektronen, so erhält man bei der Integration über die Ausstrahlung ein an der unteren Grenze logarithmisch divergentes Integral („Infrarotkatastrophe“). Bloch und Nordsiek²¹ sowie Braunbek und Weinmann²² beim Problem der Rutherford-Streuung konnten zeigen, daß dieser Sachverhalt darauf zurückzuführen ist, daß neben der stattfindenden Streuung noch sehr viele Lichtquanten sehr kleiner Energie ausgestrahlt werden. Da das Lichtquant keine endliche Ruhmasse besitzt, ist diesem Vorgang durch den Energiesatz keine Grenze gesetzt. Durch den Einfluß der höheren Näherungen (Vielquantenprozesse) ließ sich diese Schwierigkeit vermeiden. Jedoch treten dann neue Divergenzen bei den hohen Quantenenergien auf, wie schon von den ebengenannten Verfassern bemerkt wurde. In neuerer Zeit hat nun Lewis²³ gezeigt, daß diese Divergenzen den divergierenden Trägheitstermen zuzuordnen sind, wie aus unseren Überlegungen zu erwarten ist. Bethe und Oppenheimer²⁴ haben schon vorher hier das Verhalten der Heitlerschen Theorie geprüft und dabei das erneute Auftauchen der Infrarotkatastrophe festgestellt. Daß die Heitlersche Theorie entsprechend unseren obigen Folgerungen auch in anderen Energiebereichen schlechte Näherungen liefern kann, ist weiterhin von Blatt²⁵ mit Hilfe einfacher exakt lösbarer Beispiele direkt gezeigt worden.

Es ist interessant, die inzwischen wenigstens teilweise hier bekanntgewordenen Ergebnisse neuerer japanischer²⁶ und amerikanischer²⁷ Arbeiten, die den

²¹ F. Bloch u. A. Nordsiek, Physic. Rev. (2) **52**, 54 [1937].

²² W. Braunbek u. E. Weinmann, Z. Physik **110**, 360 [1938].

²³ H. W. Lewis, Physic. Rev. (2) **73**, 173 [1948].

²⁴ H. A. Bethe u. J. R. Oppenheimer, Physic. Rev. (2) **70**, 451 [1946].

²⁵ J. M. Blatt, Physic. Rev. (2) **72**, 466 [1947].

²⁶ Die betreffenden Arbeiten sind leider hier nicht zugänglich, so daß nur Zusammenfassungen davon aus W. Heitler, Proc. Roy. Irish Acad., Ser. A **52**, 95 [1949], und S. Tomonaga, Physic. Rev. (2) **74**, 224 [1948], bekannt sind.

²⁷ J. Schwinger, Physic. Rev. (2) **73**, 416 [1948]; Physic. Rev. (2) **74**, 1439 [1948]; Physic. Rev. (2) **75**, 651 [1949].

und Wellennormale voneinander verschieden und es gilt stets das erwähnte Gesetz der Kristalloptik. Die für Radiowellen gegebene Ableitung¹ lässt sich ohne weiteres auf beliebige Arten von Wellen übertragen.

Hier wird das Gesetz auf besonders einfache Weise und unter allgemeineren Gesichtspunkten nochmals abgeleitet und auf andere Arten von Wellen angewandt. Die Überlegungen sind rein geometrisch-optisch. Es werden auch *inhomogene* anisotrope Medien betrachtet, und zwar speziell solche mit ebener Schichtung. Vorausgesetzt ist immer langsame Änderung des Brechungsindex in Abhängigkeit vom Ort.

Die Bilder von Wellenflächen und Indexflächen, die gezeigt werden, liefern zusammen mit dem Gesetz eine gute Vorstellung von den Wellen und deren Ausbreitung nach dem Brechungsgesetz. Die Strahlrichtungen und Strahlwege, die man aus den Bildern ermittelt, sind selbstverständlich die, die man mit bekannten Methoden auch erhält.

Die geometrisch-optischen Methoden sind immer dieselben, unabhängig von der Art der Wellen. Es genügt für sie, wenn man die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellennormalenrichtung und vom Ort kennt, oder, was das gleiche bedeutet, die Indexfläche der Welle für jede Stelle; die Wellengleichung selbst braucht man dann nicht. Erst, wenn man über die geometrische Optik hinausgeht, kommt es auf die individuelle Wellengleichung der betreffenden Wellenart an, und erst, wenn man sich für die Eigenschaften der Welle und die Art der Schwingungen interessiert, muß man nach der Wellenfunktion und ihrer Bedeutung fragen.

B. Wellenfläche und Wellennormale, Indexfläche und Strahlrichtung

In einer *ebenen Welle* in einem homogenen Medium ist die Ortsabhängigkeit irgendeiner Größe der Welle (beispielsweise der elektrischen Feldstärke) gegeben durch

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

oder

$$e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}.$$
(1)

Der Ausbreitungsvektor \mathbf{k} hat die Richtung der Wellennormale und die Größe $2\pi/\lambda$ (λ = Wellenlänge). Der Ortsvektor \mathbf{r} (Komponenten x, y, z) ist beliebig. Man kann

$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{n}$$

setzen. $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ soll der Betrag des Ausbreitungsvektors in Vakuum (oder im isotropen Ausgangs-

medium) sein und \mathbf{n} ein Vektor, dessen Richtung die Wellennormale und dessen Betrag der Brechungsindex (bezogen auf Vakuum oder auf das Ausgangsmedium) ist („Normalvektor“ nach M. Herzberger und Ph. Frank³). Aus (1) wird damit

$$e^{i k_0 (\mathbf{n}, \mathbf{r})}. \quad (2)$$

In einer Welle, die sich vom Koordinatenursprung *radial nach allen Richtungen* ausbreitet, kann man in einem Abstand vom Koordinatenursprung jedes Flächenelement der Wellenfläche als eben ansehen. Die Ortsabhängigkeit wird daher wieder durch (1) oder (2) dargestellt. \mathbf{r} ist dabei der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zu einem Flächenelement der Wellenfläche. Die Vektoren \mathbf{f} und \mathbf{n} sind jetzt nicht konstant, sondern für jedes Flächenelement der Wellenfläche anders. Sie stehen überall senkrecht auf der Wellenfläche. Der Brechungsindex, der Betrag von \mathbf{n} , ist eine Funktion der Richtung, wenn das Medium anisotrop ist. Der Radiusvektor \mathbf{r} gibt den Weg an, den das Flächenelement der Wellenfläche zurückgelegt hat. Infolgedessen ist die Richtung von \mathbf{r} die Strahlrichtung für das Flächenelement. Die Wellenfläche ist die Fresnelsche Wellenfläche, auch Strahlenfläche genannt.

Auf der Wellenfläche ist Ausdruck (2) konstant, also auch

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \text{const.} \quad (3)$$

Betrag und Richtung des Vektors \mathbf{n} sind eine Funktion der Richtung von \mathbf{r} . Daß \mathbf{n} senkrecht auf der Wellenfläche steht, kann man ausdrücken durch

$$(\mathbf{n}, \delta\mathbf{r}) = 0. \quad (4)$$

$\delta\mathbf{r}$ soll dabei die Änderung von \mathbf{r} beim Übergang zu einem Nachbarpunkt in der Wellenfläche bedeuten und ist daher tangential zur Wellenfläche. Aus (3) folgt für den Übergang zu einem Nachbarpunkt auf der Wellenfläche

$$(\delta\mathbf{n}, \mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \delta\mathbf{r}) = 0. \quad (5)$$

(4) und (5) zusammen ergeben

$$(\delta\mathbf{n}, \mathbf{r}) = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung kann man ähnlich wie Gl. (4) auslegen. Gl. (4) sagte, daß \mathbf{n} senkrecht auf der Wellenfläche steht. Gl. (6) sagt daher: Trägt man

³ Ph. Frank, Z. Physik 80, 4 [1933]; W. Glaser, Z. Physik 80, 451 [1933]; Ph. Frank, Strahlenoptik, in Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik u. Physik, II, 2. Aufl., S. 1—43, Braunschweig 1935.

vom Koordinatenursprung nicht die Vektoren r auf (wie in der Wellenfläche geschehen), sondern alle Vektoren n , die möglich sind, so erhält man eine Fläche, deren Normale überall die Richtung von r hat. Die Fläche ist die graphische Darstellung des Brechungsindex zu jeder Wellennormalenrichtung in räumlichen Polarkoordinaten und heißt in der Kristalloptik (nach MacCullagh) Indexfläche.

Es gilt hiernach das *Gesetz: Die Strahlrichtung ist die Normale zur Indexfläche*⁴. Man kann das analoge (fast selbstverständliche) Gesetz hinzufügen: Die Wellennormale ist die Normale zur Wellenfläche. Mittels Gl. (3) läßt sich auch noch der Betrag des Vektors n aus der Wellenfläche herauslesen, ebenso der Betrag von r aus der Indexfläche. Man kann demnach aus der Wellenfläche die Indexfläche gewinnen und auf gleiche Weise aus der Indexfläche die Wellenfläche. Wellenfläche und Indexfläche sind in gewissem Sinn zueinander komplementär.

Das Gesetz gilt auch in *inhomogenen Medien* an jeder Stelle, sofern die Voraussetzungen für die Gültigkeit der geometrischen Optik gegeben sind. An die Stelle von (n, r) muß man dann für viele Zwecke das Integral

$$\int (n, d\vec{s})$$

setzen mit dem vektoriellen Wegelement $d\vec{s}$.

Die Ausbreitung von Wellen in *eben geschichteten Medien* mit langsam veränderlichem Brechungsindex ist dadurch bestimmt, daß erstens die Wellennormale stets in der Einfallsebene bleibt und zweitens das Brechungsgesetz gilt:

$$n \sin \varphi = \text{const.} \quad (7)$$

Diese beiden Bedingungen zusammen stellen in räumlichen Polarkoordinaten (n, φ) eine Gerade dar (bei horizontaler Schichtung eine vertikale Gerade). n und φ erhält man demnach als die Daten der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Indexfläche (s. Abb. 2). Zugleich kann man die zugehörige Strahl-

⁴ Dieses Gesetz in der Kristalloptik sowie die geometrische Deutung des Brechungsgesetzes (s. unten) stammen von W. R. Hamilton (Trans. Roy. Irish Acad. **17**, 144 [1837]) und J. MacCullagh (Trans. Roy. Irish Acad. **17**, 252 [1837] und Collect. Works S. 36, London 1880). Siehe auch G. Süss, Handb. Physik **20**, 680 u. 707, Berlin 1928. Die hier gegebene Ableitung des Gesetzes ist im wesentlichen die von Hamilton. — Statt der Indexfläche (Vektor n) kann man auch die Ausbreitungsfläche (Vektor t) nehmen. Über Ausbreitungsflächen von Kristallgittern und deren Anwendung auf die Gitterbeugung siehe E. Fues, Ann. Physik (5) **36**, 209 [1939].

richtung als die Normale der Indexfläche im Punkt n, φ bestimmen. Die so ermittelten Strahlrichtungen lassen sich zu einem ganzen gekrümmten Strahlweg, wie er in geschichteten Medien auftritt, zusammensetzen⁵.

C. Verschiedene Gesetze der Strahloptik

Gl. (6) liefert die Strahlrichtung (Richtung von r). Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellennormalenrichtung muß dazu bekannt sein.

Verschiedene Gesetze der geometrischen Optik, die man auf anisotrope Medien übertragen kann, bestimmen ebenfalls die Strahlrichtung. Im folgenden seien einige davon kurz angegeben (nach Ph. Frank³ und H. Bremmer⁶), und zwar in der vektoriellen Schreibweise. Es läßt sich zeigen (hier ist jedoch darauf verzichtet), daß diese Gesetze gleichbedeutend sind mit (6).

Das Eikonal ist im homogenen anisotropen Medium⁷ definiert durch

$$S = k_0 (n, r). \quad (8)$$

Die *Eikonalgleichung* lautet

$$\text{grad } S = k_0 n. \quad (9)$$

Man könnte glauben, sie sei eine fast triviale Folgerung von (8). Das ist aber nicht so, da n von r abhängt. Zur Ableitung der Eikonalgleichung verwendet man vorteilhaft Gl. (6) oder das daraus gewonnene Gesetz.

Das *Fermatsche Prinzip* kann für anisotrope Medien geschrieben werden

$$\delta \int_1^2 (n, d\vec{s}) = 0. \quad (10)$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen wie bei isotropen Medien (Endpunkte des Integrationswegs sind nicht zu variieren); nur ist an Stelle des Produkts $nd\vec{s}$ das skalare Produkt der Vektoren n und $d\vec{s}$ getreten. n und $d\vec{s}$ sind dabei immer passend zueinander zu wählen, so daß die Richtung von $d\vec{s}$ die Strahlrichtung zu n ist. n ist also mitzuvariieren.

Das *Prinzip der stationären Phase* ist das, das zur

⁵ Ausgeführt in den angegebenen Arbeiten über Radiowellen-Ausbreitung^{1, 2}. Bezuglich kugelförmig geschichteter Medien s. ², 2. Arbeit (S. 152, Fußnote).

⁶ H. Bremmer, Terrestrial radio waves, Theory of propagation, New York, Amsterdam, London, Brussels 1949; Philips Res. Rep. 4, 1, 189 [1949].

⁷ Im inhomogenen Medium ist (n, r) durch das oben angegebene Integral zu ersetzen.

Ableitung der Gl. (6) für Radiowellen¹ schon verwendet wurde⁸.

Bei elektrischen Wellen ist die Strahlrichtung, die man auf irgendeine Weise erhält, stets die Richtung des zeitlichen Mittels des Poyntingschen Vektors.

D. Schall in bewegter Luft

Luft wird durch Wind für die Schallausbreitung anisotrop. Davon, daß die Schallgeschwindigkeit von der Temperatur und Zusammensetzung (Wasser dampfgehalt) der Luft abhängt, soll hier abgesehen werden. Im allgemeinen nimmt die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zu. Die Luft ist dann ein eben geschichtetes anisotropes Medium. Schallwege in Wind hat früher R. Emden ausführlich berechnet⁹. Hier soll die Schallausbreitung an Hand der Indexflächen erläutert werden.

Zunächst sei homogene Luftbewegung (unabhängig von der Höhe) angenommen. Die Wellenflächen sind dann Kugeln, wie man in einem mit der Luft mitbewegten Bezugssystem sieht¹⁰. Durch die Luftbewegung werden die Wellenflächen nur verschoben. Für die Wellenfläche, die vor 1 Sekunde die Schallquelle verlassen hat, ist der Kugelradius c (c = Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft) und die Verschiebung gleich der Luftgeschwindigkeit v (Abb. 1). Das Wellenzentrum (Koordinatenursprung) liegt innerhalb oder außerhalb der Kugel, je nachdem $v/c < 1$ oder > 1 ist. Der Fall $v/c > 1$ kommt in der freien Atmosphäre nicht vor. Allgemein bekannt dagegen ist der Fall, daß eine Schallquelle sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt. Für ein mit der Schallquelle bewegtes Bezugssystem ist dann $v/c > 1$. An diesem Beispiel kann man also die Verhältnisse für Luft, die mit Überschallgeschwindigkeit bewegt ist, untersuchen.

Der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt der Wellenfläche ist der Strahlvektor (Weg des Elements der Wellenfläche). In Abb. 1 ist er, da die Zeiteinheit zugrunde gelegt ist, die sog. Strahlgeschwindigkeit (diese ist die Gruppengeschwindigkeit, wenn keine Dispersion vorhanden ist). Die Projektion der Strahlgeschwindigkeit auf die Wellen-

⁸ Näheres über das Prinzip der stationären Phase und Anwendung dieses Prinzips siehe C. Eckart, Rev. mod. Physics **20**, 399 [1948] (eindimensionale Betrachtung, nicht anisotrop); H. G. Boker, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **237**, 411 [1939]; H. Bremer⁶.

⁹ R. Emden, Meteorol. Z. **1918**, 13, 74 u. 114; s. auch E. A. Milne, Philos. Mag. J. Sci. (6) **42**, 96 [1921]; Beobachtungen von E. v. Angerer u. R. Ladenburg, Ann. Physik (4) **66**, 293 [1921].

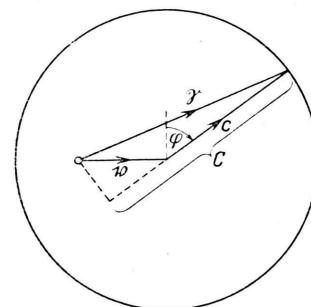


Abb. 1. Wellenfläche von Schall bei Wind ($v/c < 1$).
○ Wellenzentrum, v Windgeschwindigkeit, c Schallgeschwindigkeit ohne Wind, C Phasengeschwindigkeit, \mathfrak{C} Strahlgeschwindigkeit (Strahlrichtung).

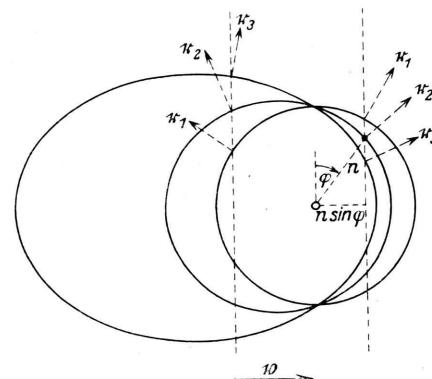


Abb. 2. Indexflächen von Schall bei Wind ($v/c < 1$).
○ Koordinatenursprung, v Windrichtung, r_1 , r_2 , r_3 Strahlrichtungen (Reihenfolge zunehmender Windgeschwindigkeit).

normale (Kugelnormale) ist die Phasengeschwindigkeit C

$$C = c + v \sin \varphi.$$

$90^\circ - \varphi$ bedeutet dabei den Winkel zwischen Luftgeschwindigkeit und Wellennormale (s. Abb. 1). Der Brechungsindex ist

$$n = c/C = \frac{1}{1 + v/c \sin \varphi}.$$

Diese Beziehung $n(\varphi)$ stellt in ebenen Polarkoordinaten für $v/c < 1$ eine Ellipse (Abb. 2), für $v/c > 1$ eine Hyperbel (Abb. 3) dar. Der Koordinatenursprung ist der eine Brennpunkt. Die Indexfläche ist hiernach

¹⁰ Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion braucht man hier wie bisher nicht zu beachten. In dem bewegten Bezugssystem ist durch Doppler-Effekt die Frequenz an verschiedenen Stellen der Wellenfläche verschieden. Das macht aber nichts aus; denn die Wellenfläche soll nur die Enveloppe aller möglichen Wellenebenen sein, die auch zu ebenen Wellen von uneinheitlicher Frequenz gehören können.

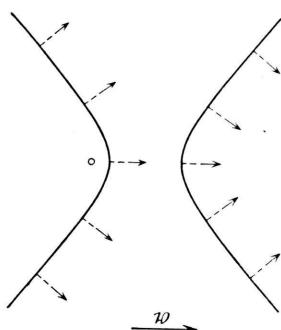


Abb. 3. Indexfläche von Schall bei Wind ($v/c > 1$).
 ○ Koordinatenursprung, v Windrichtung, gestrichelte Pfeile: Strahlrichtung.

ein Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid.

Für $v/c > 1$ liegen alle Strahlrichtungen, die möglich sind, innerhalb eines Kegels, des Machschen Kegels. Auch die Phasengeschwindigkeit kann dann nicht beliebige Richtungen annehmen. Das alles ist gut bekannt oder einleuchtend in dem oben erwähnten Beispiel der bewegten Schallquelle ($v/c > 1$) mit mitbewegtem Bezugssystem.

Wenn die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zunimmt, so nimmt auch die Exzentrizität der Indexfläche mit der Höhe zu (Abb. 2¹¹). Das Brechungsgesetz (7) wird in der Schar der Indexflächen durch eine vertikale Gerade dargestellt (vgl. Abschnitt B). Man sieht in Abb. 2, daß bei Schallausbreitung *mit* dem Wind (vertikale Gerade rechts vom Koordinatenursprung) ein aufsteigender Strahl (Flächennormalen in den Schnittpunkten) mit zunehmender Windgeschwindigkeit zum Boden hin gedreht wird, bei Schallausbreitung *gegen* den Wind dagegen vom Boden weg, so, wie es bekannt ist.

E. Materiewellen (Elektronenstrahlen)

Die Ausbreitungsverhältnisse für Materiewellen sind anisotrop, wenn ein Vektorpotential \mathfrak{A} und somit ein Magnetfeld gegeben ist. Die Schrödinger-Gleichung lautet dann (bei beliebigem zeitlich konstan-

¹¹ Die Werte von v/c in Abb. 2 sind 0, 1/3 und 2/3. Die atmosphärischen Verhältnisse sind also übertrieben.

¹² W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handb. Physik, 2. Aufl., 24, 1, S. 108—111, Berlin 1933; A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Bd. 2, S. 43—45 und 720—722, Braunschweig 1939.

¹³ Das Quadrat in der Gleichung soll das skalare Produkt bedeuten, $\nabla^2 = \Delta$ den Laplace-Operator, $\nabla \psi = \text{grad } \psi$, $\nabla \mathfrak{A} = \text{div } \mathfrak{A} = 0$. m ist die Ruhmasse, e die Ladung des Elektrons (negativ einzusetzen), $\hbar = h/2\pi$.

tem elektrischem und magnetischem Feld)¹²

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 \psi = (W - V) \psi. \quad (11)$$

Hierin bedeuten W die Gesamtenergie, V die potentielle Energie, also $W - V = m v^2/2$ die kinetische Energie der Teilchen¹³. Durch Einsetzen der Wellenfunktion

$$\psi = C e^{i \int (t, ds)} \quad (12)$$

und Einführung der Teilchengeschwindigkeit v an Stelle von $W - V$ erhält man unter der Voraussetzung, daß alle Größen, außer der Wellenfunktion, sich nur langsam mit dem Ort ändern, die Gleichung¹⁴

$$\left(\frac{\hbar}{i} \mathfrak{f} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 = (m v)^2. \quad (13)$$

Den Brechungsindex-Vektor \mathfrak{n} , der proportional \mathfrak{f} sein soll, kann man (etwas abweichend von Abschnitt B) ansetzen

$$\mathfrak{n} = \frac{\hbar}{m c} \mathfrak{f}.$$

\mathfrak{n} ist damit dimensionslos und der Proportionalitätsfaktor eine universelle Konstante. Aus Gl. (13) folgt dann

$$\left(\mathfrak{n} - \frac{e}{m c^2} \mathfrak{A} \right)^2 = \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (14)$$

Relativistisch formuliert ist diese Gleichung so¹⁵:

$$\left(\mathfrak{n} - \frac{e}{m c^2} \mathfrak{A} \right)^2 = \frac{(v/c)^2}{1 - (v/c)^2}. \quad (14a)$$

Gl. (14) soll skalar geschrieben werden. Man kann dazu \mathfrak{A} in der x -Richtung und \mathfrak{n} in der x, z -Ebene annehmen (Komponenten n_x, n_z) und erhält dann

$$\left(n_x - \frac{e}{m c^2} A \right)^2 + n_z^2 = \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad (15)$$

oder man führt den Winkel (α) zwischen der Richtung von \mathfrak{A} und der Wellennormale ein und erhält

$$n^2 - 2 \frac{e}{m c^2} A n \cos \alpha + \left(\frac{e}{m c^2} A \right)^2 = \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (16)$$

Diese Gleichung kann allgemein zur Berechnung des Brechungsindex der Materiewellen verwendet wer-

¹⁴ Addition und Subtraktion der Vektoren immer vektoriell!

¹⁵ Gl. (13) ist im wesentlichen die erweiterte de Broglie-Beziehung

$$\hbar \mathfrak{f} = m \mathfrak{v} + e \mathfrak{A}/c.$$

Gl. (14a), etwas anders geschrieben, gibt W. Glasser¹⁶ für den „Normalvektor“ \mathfrak{n} an. Hier werden daraus der Brechungsindex $|\mathfrak{n}|$ und die Indexfläche gewonnen.

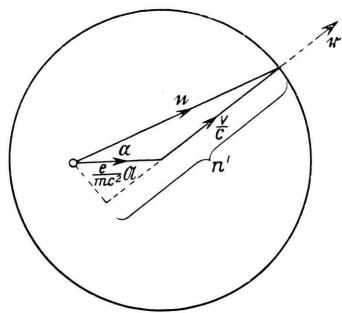


Abb. 4. Indexfläche von Materiewellen, $\left| \frac{e}{mc^2} A \right| < \frac{v}{c}$.
○ Koordinatenursprung, r Strahlrichtung.

den. Lediglich die rechte Seite ist erforderlichenfalls nach (14a) relativistisch umzuschreiben.

Die Indexfläche ist nach Gl. (15) eine Kugel, die in der Richtung $e\mathfrak{A}$ (x -Richtung) vom Ursprung verschoben liegt (Abb. 4). Der Koordinatenursprung kann sich außerhalb oder innerhalb der Kugel befinden. Die Strahlrichtung ist auch hier die Normale zur Indexfläche.

Die Strahlrichtung der Materiewellen stellt die Flugrichtung der Teilchen dar, der Strahlweg also die Bahn der Teilchen unter dem Einfluß des elektrischen und magnetischen Feldes¹⁶, wobei diese Felder gegeben sind durch

$$\begin{aligned} e\mathfrak{E} &= -\text{grad } V, \\ \mathfrak{H} &= \text{rot } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Setzt man einfach zu überblickende Verhältnisse voraus, etwa indem man in Gl. (15) $A = A_x$ und v nur von z abhängen läßt — das ist wieder ebene Schichtung —, so kann man auf die beschriebene Weise (Abschnitt B, Abb. 2) Strahlwege konstruieren und auch leicht bestätigen, daß die Strahlrichtung übereinstimmt mit der Flugrichtung der Teilchen, die sich infolge der elektrischen und magnetischen Ablenkung ergibt. Da die Indexflächen von Materiewellen so einfach aussehen, können sie vielleicht manchmal zur Anwendung des Brechungsgesetzes und zur Ermittlung von Strahlrichtungen nützlich sein.

Die Wellenflächen von Materiewellen

Die Indexflächen von Materiewellen sind dasselbe wie die Wellenflächen von Schall in bewegter Luft

¹⁶ S. dazu C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 117, 258 [1927]. In dem Beispiel von magnetischer Ablenkung, das Darwin behandelt, stimmt die Flugrichtung des Elektrons stets mit der Richtung von \mathfrak{A} überein. In diesem speziellen Beispiel sind daher Strahlrichtung und Wellennormale nirgends voneinander verschieden.

(Abb. 1), nämlich exzentrische Kugeln. Infolge der Komplementarität von Indexflächen und Wellenflächen (Abschnitt B) sind die Wellenflächen jetzt das, was bei Schall die Indexflächen waren: Rotationsellipsoide (Abb. 2) oder zweischalige Rotationshyperboloiden (Abb. 3).

Unter Wellenflächen sind hier immer die Wellenflächen verstanden, die man bei einem allseitig ausstrahlenden Wellenzentrum im homogenen „Medium“ (konstantes \mathfrak{A} und V bzw. v) erhält. Im inhomogenen Medium treten diese Wellenflächen nur in der Nähe eines Wellenzentrums auf, also nur in der Nähe eines Punktes, von dem aus Teilchen in beliebiger Richtung wegfliegen. Die Wellenflächen sind auch die, die man bei Anwendung des Huygensschen Prinzips als Elementarwellen anzusetzen hat.

Sehr merkwürdig ist das zweischalige Hyperboloid, das sich als Wellenfläche ergibt, wenn der Koordinatenursprung außerhalb der Indexfläche liegt, wenn also [vgl. (15)]

$$\left| \frac{e}{mc^2} A \right| > \frac{v}{c} \quad (17)$$

ist. In manchen Richtungen, vom Koordinatenursprung (Wellenzentrum) ausgehend, trifft man beide Schalen der Fläche, in anderen Richtungen dagegen keinen Teil der Fläche. Diese Strahlrichtungen (= Flugrichtungen von Teilchen) sollten demnach gar nicht möglich sein. Das ist aber nicht denkbar. Des Rätsels Lösung findet man durch Abschätzung der Gruppengeschwindigkeit¹⁷ aus (18) und der Frequenzbedingung

$$W = \hbar \omega.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist negativ für die Hyperboloidschale, die vom Koordinatenursprung abgekehrt liegt (in Abb. 3 die rechte). Zu dieser Hyperboloidschale gehören demnach nicht die Strahlrichtungen vom Ursprung zur Fläche, sondern die entgegengesetzten von der Fläche zum Ursprung.

Man muß sich hier daran erinnern, daß es nach der Theorie nicht nur die bisher behandelten üblichen Wellenflächen geben kann, die im Ursprungspunkt entstehen und sich allseitig ausdehnen, sondern auch solche, die sich zum Ursprung hin zusammenziehen. Diese letzteren gehen aus den üblichen Wellenflächen durch Spiegelung am Ursprung hervor. Für sie ist die Strahlrichtung normalerweise die Richtung von der

¹⁷ Die Projektion der Gruppengeschwindigkeit in die Richtung der Wellennormale ist $d\omega/dk$. Dieser Differentialquotient ergibt sich im vorliegenden Fall negativ. Die Richtung der Gruppengeschwindigkeit ist die Strahlrichtung.

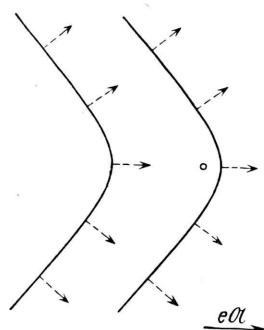


Abb. 5. Wellenfläche von Materiewellen, $\left| \frac{e}{mc^2} A \right| > \frac{v}{c}$.
○ Wellenzentrum, gestrichelte Pfeile: Richtung der Phasengeschwindigkeit.

Fläche zum Ursprung. Man kann nun die Hyperboloidschale mit negativer Gruppengeschwindigkeit am Ursprung spiegeln. Die Strahlrichtungen, die in diesem Fall vor der Spiegelung zum Ursprung hinführten, gehen nach der Spiegelung vom Ursprung zur Fläche, wie man es haben will. Aber die gespiegelte Hyperboloidschale selbst läuft zusammenschrumpfend zum Ursprung hin. Das Bild der ganzen Wellenfläche (die eine Schale gespiegelt) ist in Abb. 5 dargestellt. Jede Strahlrichtung, die vom Ursprung ausgeht, trifft einen Punkt der Fläche. Eine Schale der Fläche (in Abb. 5 die rechte) wandert vom Ursprung weg, die andere aber zum Ursprung hin. In der letzteren bilden demnach Strahlrichtung und Phasengeschwindigkeit miteinander einen Winkel über 90° ; das ist die Folge der negativen Gruppengeschwindigkeit.

Wenn das Vektorpotential \mathfrak{A} genügend groß ist, sind also in einem gewissen Richtungsbereich Wellen möglich, die zu einem Punkt hin zusammenlaufen, anstatt von einem Punkt auszugehen, wie sie es sonst tun. Hat man einen scharfen Strahl, so wandern unter diesen Bedingungen die Wellenflächen entgegen gesetzt der Flugrichtung der Teilchen. In Experimenten treten aber nie die Wellen selbst in Erscheinung. Man kann infolge der Eichinvarianz der Schrödinger-Gleichung^{12, 18} nicht einmal angeben, wie sie in einem gegebenen Fall wirklich aussehen; denn \mathfrak{A} und V sind nicht vollständig bestimmt. Beispielsweise kann man zu \mathfrak{A} einen willkürlichen konstanten Vektor addieren. Auf diese Weise läßt sich aber stets erreichen, daß die Wellenflächen an einer bestimmten Stelle keine Hyperbole sind. Die Hyperboloid-Wellenflächen mit ihrem merkwürdigen Verhalten

¹⁸ V. Fock, Z. Physik **39**, 226 [1926]; F. London (im Anschluß an H. Weyl), Z. Physik **42**, 375 [1927].

können sich daher auf keine Weise bemerkbar machen. Wenn in einem geschichteten Medium das Vektorpotential einen genügend großen Wertebereich umfaßt, ist diese Art von Wellenflächen allerdings nicht an allen Stellen vermeidbar, sondern sie kann durch Abänderung von \mathfrak{A} nur in ein anderes Gebiet verlegt werden.

Bei Licht und Radiowellen ist im Gegensatz zu den Materiewellen keine negative Gruppengeschwindigkeit möglich¹⁹, vorausgesetzt, daß die Wellen als eben angesehen werden können, und auch keine Absorption mitspielt. Das Aussehen der Wellenflächen ist bei elektrischen Wellen auch nicht unbestimmt durch die Unbestimmtheit von Größen wie \mathfrak{A} und V .

Der Brechungsindex in der Elektronenoptik

Der Brechungsindex, den man in der Elektronenoptik nach Ph. Frank und W. Gasser angibt^{3, 20}, ist anders definiert als hier. Er sei mit n' bezeichnet zum Unterschied vom obigen n . In der Elektronenoptik fordert man, daß das Fermatsche Prinzip in der gleichen Form wie für isotrope Medien gilt,

$$\delta \int n' ds = 0.$$

Wie man durch Vergleich dieses Ausdrucks mit dem oben gebrachten Fermatschen Prinzip für anisotrope Medien (10) sieht, ist n' (bis auf einen beliebigen konstanten Faktor) die Projektion von n in die Richtung des Wegelementes ds , also in die Strahlrichtung (s. auch Abb. 4):

$$n' = n \cos \varphi_s,$$

wenn φ_s der Winkel zwischen Wellennormale (Richtung von \mathfrak{n}) und Strahlrichtung ist. Im isotropen Fall ($\mathfrak{A} = 0$, kein magnetisches Feld) stimmen n' und n überein.

n ist umgekehrt proportional zur Phasengeschwindigkeit und entspricht dem Brechungsindex der Kristalloptik. n' dagegen ist umgekehrt proportional zur Strahlgeschwindigkeit und ist somit das, was man in der Kristalloptik Strahlenindex nennt (nach M. Born, s. z. B. G. Sivessy⁴, S. 651).

Der hier definierte Brechungsindex n folgt zwangsläufig aus der Wellentheorie. Er ist der Betrag des

¹⁹ Man sieht das, wenn man aus \mathfrak{E} und $\mathfrak{H} = [\mathfrak{n} \mathfrak{E}]$ (diese Beziehung folgt aus der einen Maxwellschen Gleichung) den Poyntingschen Vektor bildet. Dieser und \mathfrak{n} können keinen stumpfen Winkel miteinander bilden.

²⁰ E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin 1934, S. 38.

Frankschen Normalvektors π und ist zu berechnen aus Gl. (16). Das Brechungsgesetz (7) und die Eikonalgleichung (9) gelten nur für ihn. Für den Brechungsindex n' der Elektronenoptik müssen Brechungsgesetz und Eikonalgleichung abgeändert werden, wie es W. Glaeser³ macht. Bekanntlich geht man aber in der geometrischen Elektronenoptik häufig gar nicht von geometrisch-optischen Gesetzen aus, sondern von der elektrischen und magnetischen Ablenkung der Elektronen.

F. Schlußbemerkungen

In den oben behandelten Beispielen der Wellenausbreitung ist die Indexfläche eine algebraische Fläche 2. Grades. In der Kristallopptik und bei Radiowellen dagegen ist sie vom 4. Grad. Es tritt dann Doppelbrechung ein; denn das Brechungsgesetz lie-

fert mit einer Indexfläche 4. Grades im allgemeinen 4 Lösungen für die Welle im anisotropen Medium: zwei aufsteigende Wellen und zwei absteigende Wellen². Eine Indexfläche 4. Grades kann in inhomogenen (geschichteten) Medien auch zu allerlei sonderbaren Erscheinungen führen, wie das Beispiel der Radiowellen^{1, 2} zeigt.

Die zitierten Arbeiten befassen sich mit Kristallopptik (4 und Ph. Frank³), mit Licht in bewegten Medien (Ph. Frank³), mit Radiowellen (1, 2, 6 und H. G. Book⁸), mit Schall bei Wind⁹ und mit Materiewellen oder der Schrödinger-Gleichung (12, 16, 18) sowie mit der eigentlichen geometrischen Elektronenoptik (20 und W. Glaeser³). Die allgemeinen Gesetze der Wellenausbreitung in anisotropen Verhältnissen (abgesehen von dem hier ausführlich behandelten Gesetz) bringen Ph. Frank³ und H. Bremermeier⁶.

Über einen konzentrationsabhängigen H-D-Austauschprozeß an den Oberflächen von Aluminiumkathoden

Von Eva KÜHNE-SAUTER

Aus der Forschungsstelle für Spektroskopie in der Max-Planck-Gesellschaft
(ehem. Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen)

(Z. Naturforsch. 5a, 499—501 [1950]; eingegangen am 3. Mai 1949)

Es wird ein Deuterium-Anreicherungs-Prozeß untersucht, der an Aluminium-Oberflächen stattfindet, die im Vakuum mit D_2O-H_2O -Gemischen bestimmter Konzentration benetzt werden und als Kathoden einer Glimmentladung spektroskopischen Messungen zugänglich sind. Quantitative Spektraluntersuchungen ergeben eine Abhängigkeit der Anreicherung von der Konzentration der Ausgangsflüssigkeit. Es wird bei stärkerer D_2O -Konzentration eine Anreicherung des D in der Kathode festgestellt, während bei D_{aq}/H_{aq} -Verhältnissen $< 1:400$ eine Verarmung an Deuterium beobachtet wird.

Bei Helium-Glimmentladungen mit einer Schüler-schen Hohlkathode aus Aluminium tritt neben den Atomlinien von Al und He das Spektrum des Aluminiumhydrids auffallend intensiv in Erscheinung¹, da Aluminium immer Wasserstoff enthält, auch wenn es im Vakuum geschmolzen wurde. Bereits in früheren Arbeiten zeigten Schüller und Mitarbb.², daß Aluminiumhydrid nicht im Gasraum, sondern an der Metallocberfläche entsteht. Durch die starke Intensität des AlH-Spektrums müßte es möglich sein, neben diesem auch das Aluminium-Deuterid-Spektrum zu beobachten, da D : H im Verhältnis

1 : 6000 in der Natur vorkommt. Auch ist eine spektroskopische Beobachtung hier besonders günstig, da die 0-0-Bande³ von AlH bei 4241 Å in einem photographisch bequem zugänglichen Gebiet liegt und nach Rot abschattiert ist, so daß die nach kürzeren Wellen verschobene Bande des schweren Isotops wenigstens zu einem Teil ungestört erscheint. Außerdem sind die beiden Kanten um 6 Å gegeneinander verschoben und bei der zur Verfügung stehenden Dispersion gut getrennt. Das Mischungsverhältnis von H und D, wie es sich an oder in der Al-Oberfläche einstellt, kann somit spektroskopisch an der AlH-Bande geprüft werden.

Die Versuche wurden mit einer Entladungsrohre

¹ H. Schüller u. H. Gollnow, Z. Physik 93, 611 [1935].

² H. Schüller, H. Gollnow u. H. Haber, Z. Physik 111, 508 [1939].

³ Holst u. Hulthén, Z. Physik 90, 712 [1934].